

PENGEMBANGAN ELEMEN BALOK LENGKUNG DENGAN PEDEKATAN DEGENERATED SOLID

Sanjaya Halim¹, dan Wong Foek Tjong²

¹ Mahasiswa Program Magister Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya

² Dosen Program Magister Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya

¹ b21200016@john.petra.ac.id, ² wftjong@petra.ac.id

ABSTRAK: Salah satu teori untuk menganalisis balok lengkung dalam metode elemen hingga adalah *degenerated solid beam*. Fenomena yang umum terjadi pada elemen balok lengkung adalah *shear locking* dan *membrane locking*. Untuk mengatasi *locking* ini, Koziy dan Mirza (1994) mengusulkan *consistent beam element* untuk analisis belok lengkung berdasarkan *third order shear deformation theory* (TOSD). Pada perumusan *degenerated solid beam element* umumnya menerapkan *first order shear deformation theory* (FOSD) yang membutuhkan koefisien koreksi geser. Pada penelitian ini akan dikembangkan *degenerated solid beam element* dengan modifikasi metode *least square smoothed assumed strain* (LSSAS) untuk eliminasi *locking*. Selain itu, akan diteliti perbedaan elemen yang menggunakan FOSD dengan menggunakan TOSD. Hasil pengujian diperoleh bahwa metode LSSAS tidak efektif dalam membebaskan *degenerated solid beam element* dari *locking* dan *consistent beam* merupakan elemen yang belum stabil. Penggunaan perumusan TOSD memiliki performa yang sama dengan penggunaan perumusan FOSD.

Kata kunci: metode elemen hingga, *degenerated solid beam*, *consistent beam*, *least square smoothed assumed strain*, koefisien koreksi geser

ABSTRACT: *Degenerated solid beam is a finite element method (FEM) technique for analyzing curved beams. Shear locking and membrane locking are common issues in curved beam elements. To overcome the locking, Koziy and Mirza (1994) proposed a degenerated solid consistent beam element based on the third-order shear deformation theory (TOSD). Degenerated solid beam element formulations typically employ first-order shear deformation theory (FOSD) with a shear correction coefficient. This study aims to develop a degenerated solid beam element using a modified least square smoothed assumed strain (LSSAS) method to eliminate locking and investigate the differences between elements using FOSD and TOSD. The test revealed that LSSAS is ineffective in eliminating locking in degenerated solid beam elements, and the consistent beam is unstable. The TOSD formulation performs similarly to the FOSD formulation.*

Keywords: *finite element method, degenerated solid, consistent beam, least square smoothed assumed strain, shear correction factor*

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) kini sudah secara luas digunakan sebagai metode numerik untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam desain mesin, bangunan, maupun bidang lainnya (Cook et al., 2002). MEH sudah kerap digunakan dalam bidang teknik sipil, dan

kebanyakan bangunan telah didesain menggunakan penerapan MEH, salah satunya adalah elemen balok lengkung. *Degenerated solid beam element* (Koziey & Mtrza, 1994; Nascimbene, 2013; Prathap & Naganarayana, 1990) merupakan salah satu teori yang digunakan untuk menganalisa balok lengkung dikarenakan fleksibilitas geometrinya.

Fenomena yang umum terjadi pada elemen balok lengkung adalah *shear locking* dan *membrane locking* (Stolarski & Belytschko, 1983). Pada perumusan *degenerated solid beam element* ditemukan ketidakkonsistenan. Ketidakkonsistenan ini mendorong Koziey dan Mirza (1994) untuk membuat perumusan baru yang disebut *consistent beam element*. Dengan perumusan *consistent beam element*, elemen balok bebas dari *shear locking*. Namun, penelitian Koziey dan Mirza (1994) terbatas pada deformasi geser dan lentur, belum meninjau deformasi membran atau *membrane locking*. Oleh karena itu, penelitian ini akan meninjau pengaruh dari deformasi membran pada *consistent beam element* yang telah dirumuskan oleh Koziey dan Mirza. Salah satu metode yang digunakan untuk eliminasi *locking* adalah metode *least square smoothed assumed strain* (LSSAS) atau *weighted average shape function* (Prathap & Babu, 1986). Penelitian ini akan menerapkan metode LSSAS pada *degenareted solid beam element*, diharapkan metode ini membuat proses eliminasi locking lebih efektif dan efisien.

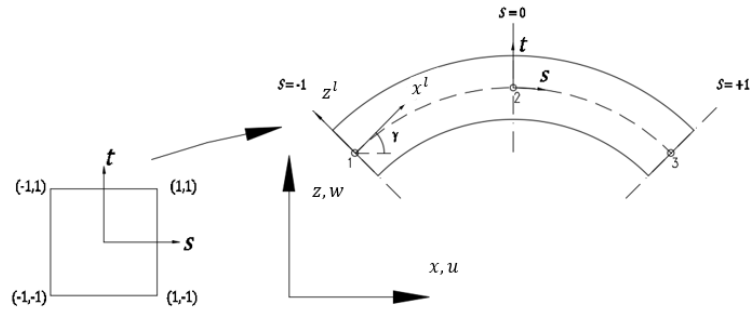
Pada perumusan *degenerated solid beam element* diterapkan *first order shear deformation* (FOSD) membutuhkan penggunaan koefisien koreksi geser k untuk membenarkan asumsi yang digunakan agar sesuai dengan kenyataan. Koziey dan Mirza (1994) menemukan perumusan baru yang dapat menggantikan koefisien koreksi geser, yaitu dengan perumusan rotasi baru yang dapat menggambarkan keadaan parabolic dari tegangan geser (ϕ) (Koziey & Mirza, 1994). Perumusan ini disebut *third order shear deformation theory* (TOSD). Penelitian Koziey dan Mizra telah dikembangkan untuk mengakomodasi efek nonlinier dari geometris (Gerges & El-Damatty, 2002), dan digunakan untuk mensimulasikan sifat-sifat garis penghantar dan memprediksi reaksi untuk beban hembusan angin yang kuat (Shehata et al, 2005). Namun pada penelitian dari Koziey dan Mirza (1994) terdapat potensi yang belum terlihat dikarenakan penelitian lebih banyak meneliti ke persoalan balok lurus dibandingkan balok lengkung. Sehingga pada penelitian ini akan meninjau perbedaan dari elemen yang menggunakan koefisien koreksi geser dan elemen yang menggunakan perumusan rotasi akibat tegangan geser (ϕ) yang akan diuji pada balok lengkung.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Degenerated Solid Beam Element

Koordinat sistem yang digunakan dalam perumusan *degenerated solid beam element* dapat dilihat pada Gambar 1. Terdapat tiga jenis koordinat yang digunakan dalam perumusan *degenerated solid beam element* dan di definisikan sebagai berikut:

1. Koordinat Cartesius global x dan z digunakan untuk perpindahan global u dan w .
2. Koordinat natural s dan t dimana s merupakan lengkungan dan t garis lurus terhadap bidang s .
3. Koordinat Cartesius lokal sistem x^l dan z^l untruk menentukan regangan lokal dan tegangan; x^l tegak lurus dan z^l sejajar terhadap titik berat lengkung secara umum.



Gambar 1. Sistem koordinat elemen balok

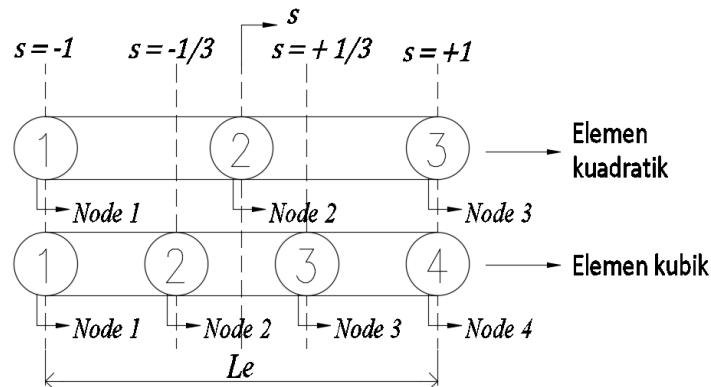
Definisi geometris dari elemen asli (*physical domain*) ditransformasikan menjadi koordinat s , dan koordinat t . Lokasi dari tiap titik dari suatu elemen di dalam sistem koordinat global (x, z) ditentukan dari koordinat poin node tersebut (x_i, z_i) dan vektor V_i di tiap node dapat di rumuskan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i \frac{t}{2} V_i \quad (1)$$

Dimana vektor V_i didefinisikan sebagai berikut:

$$V_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} x_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \quad (2)$$

Dalam penelitian ini elemen balok akan diteliti menggunakan dua jenis interpolasi yaitu fungsi interpolasi kuadratik ($n_{en}=3$) dan kubik ($n_{en}=4$) seperti yang terlihat pada Gambar 2. *Shape function* ($N_1, N_2, \dots, N_n$) yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 1.



Gambar 2. Elemen dengan interpolasi kuadratik dan kubik

Tabel 1. *Shape function* untuk elemen kuadratik (3 node) dan kubik (4 node)

	elemen memiliki node 3	Jika elemen memiliki node 3 dan node 4
N_1	$\frac{1}{2}(1-s) - \frac{1}{2}(1-s^2)$	$+\frac{1}{16}(-9s^3 + s^2 + 9s - 1)$
N_2	$\frac{1}{2}(1+s) - \frac{1}{2}(1-s^2)$	$+\frac{1}{16}(9s^3 + s^2 - 9s - 1)$
N_3	$(1-s^2)$	$+\frac{1}{16}(27s^3 + 7s^2 - 27s - 7)$
N_4		$\frac{1}{16}(-27s^3 - 9s^2 + 27s + 9)$

2.2 Displacement Field

Pada *degenerated solid beam element* digunakan asumsi penampang dari balok tegak lurus terhadap *neutral axis* pada keadaan belum berdeformasi dan penampang balok tetap datar pada kondisi berdeformasi tetapi tidak selalu tegak lurus terhadap *neutral axis*, sehingga untuk memperhitungkan deformasi akibat geser memerlukan faktor koreksi geser. Pada keadaan balok sebenarnya saat berdeformasi penampang balok sebenarnya tidak datar melainkan melengkung seperti yang dapat dilihat pada Gambar 3. Sehingga pada penelitian yang dilakukan oleh B.L. Koziey dan F.A. Mizra (1994) dirumuskan suatu perumusan baru yang bisa menggambarkan pendekatan yang lebih mendekati keadaan aktual saat balok berdeformasi. Pada penelitian tersebut faktor koreksi geser diganti menggunakan perumusan tegangan geser ϕ , dan titik perpindahan dari material point dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$u^l = u_0^l(x) - z^l \theta^l(x) - z^l \left(1 - \frac{4z^{l^2}}{h^2}\right) \phi^l(x) \quad (3)$$

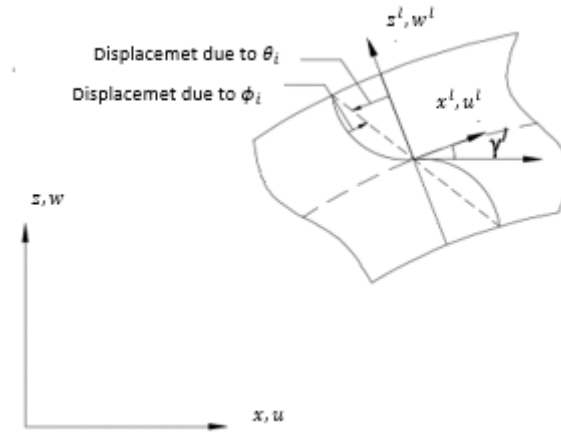
$$w^l = w^l(x) \quad (4)$$

$$\theta^l = \theta^l(x) \quad (5)$$

$$\phi^l = \phi^l(x) \quad (6)$$

Dimana w^l adalah perpindahan transversal, θ^l adalah rotasi total, u^l adalah perpindahan longitudinal, u_0^l adalah perpindahan akibat aksial di $z^l = 0$, dan ϕ^l adalah rotasi yang menggambarkan keadaan sebenarnya.

Aproksimasi dari rotasi θ dan ϕ seperti yang di definisikan di bawah, akan di dapatkan menggunakan node sisi akhir dan node sisi tengah, derajat kebebasan dapat dilihat pada Gambar 3. Asumsi di setiap node memiliki empat derajat kebebasan ($u_i, w_i, \theta_i, \phi_i$). Yang perlu di perhatikan adalah rotasi θ bersifat konstant pada suatu titik sepanjang tinggi penampang dari suatu elemen, dan ϕ berotasi kuadratik. Sehingga θ membentuk perpindahan linear terhadap u dan w sedangkan ϕ berdeformasi seperti yang dapat di lihat pada Gambar 3.

Gambar 3. Deformasi pendampang akibat rotasi θ_i dan ϕ_i

2.3 Hubungan Strain-Displacement

Penelitian yang dilakukan oleh B.L. Koziey dan F.A. Mizra (1994) regangan dirumuskan menjadi sebagai berikut:

$$\text{Aksial} \quad \varepsilon^l = \varepsilon_0^l - z^l \theta^l_{,x^l} - z^l \left(1 - \frac{4z^{l^2}}{h^2}\right) \phi^l_{,x^l} \quad (7)$$

$$\text{Geser} \quad \gamma^l = w^l_{,x^l} - \theta^l - \left(1 - \frac{12z^{l^2}}{h^2}\right) \phi^l \quad (8)$$

2.4 Strain Energy

Perumusan *degenerated solid beam element* diilustrasikan dengan mempertimbangkan *strain energy* (U^e) dari elemen, dan perumusan tersebut di tuliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U^e = & \int_0^{L^e} \frac{1}{2} EA \varepsilon_0^{l^2} dx^l + \int_0^{L^e} \frac{1}{2} EI \left(\frac{d\theta^l}{dx^l}\right)^2 dx^l + \int_0^{L^e} \frac{1}{2} EI \left(\frac{d\phi^l}{dx^l}\right)^2 dx^l - \\ & \int_{L^e} \int_A \frac{1}{2} E \left(\frac{8(z^l)^4}{h^2}\right) \left(\frac{d\phi^l}{dx^l}\right)^2 dA dx^l - \int_0^{L^e} \int_A \frac{1}{2} E \left(\frac{-16(z^l)^6}{h^4}\right) \left(\frac{d\phi^l}{dx^l}\right)^2 dA dx^l + \int_0^{L^e} \frac{1}{2} GA \left(\frac{dw^l}{dx^l}\right)^2 dx^l + \\ & \int_0^{L^e} \frac{1}{2} GA (\theta^l)^2 dx^l + \int_0^{L^e} \frac{1}{2} GA \left(\frac{d\phi^l}{dx^l}\right)^2 dx^l - \int_{L^e} \int_A \frac{1}{2} G \frac{24(z^l)^2}{h^2} \left(\frac{d\phi^l}{dx^l}\right)^2 dA dx^l + \\ & \int_{L^e} \int_A \frac{1}{2} G \frac{144(z^l)^4}{h^4} \left(\frac{d\phi^l}{dx^l}\right)^2 dA dx^l - \int_0^{L^e} GA \theta^l \left(\frac{dw^l}{dx^l}\right) dx^l - \int_0^{L^e} GA \phi^l \left(\frac{dw^l}{dx^l}\right) dx^l + \\ & \int_0^{L^e} \frac{12GI}{h^2} \left(\frac{dw^l}{dx^l}\right) dx^l + \int_0^{L^e} GA \phi^l \theta^l dx^l - \int_0^{L^e} \frac{12GI \phi^l \theta^l}{h^2} dx^l \end{aligned} \quad (9)$$

Dimana $\frac{dw^l}{dx^l}$ adalah rotasi lentur, $\frac{d\theta^l}{dx^l}$ adalah *pseudo curvature*, $\frac{du^l}{dx^l}$ adalah *membrane strain*, EI adalah kekakuan lentur, GA adalah kekakuan geser, EA adalah kekakuan aksial, dan L^e adalah panjang elemen.

2.5 Weak Form

Untuk mendapatkan matriks kekakuan digunakan prinsip *virtual work*. *Virtual work* yang digunakan pada *degenerated solid beam element* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int_{L^e} \int_A \delta \varepsilon_0^l E \varepsilon_0^l dA dx^l - \int_{L^e} \int_A \delta \theta^l {}_{,x^l} E (z^l)^2 \theta^l {}_{,x^l} dA dx^l - \int_{L^e} \int_A \delta \phi^l {}_{,x^l} E (z^l)^2 \phi^l {}_{,x^l} dA dx^l + \\ & \int_{L^e} \int_A \delta \phi^l {}_{,x^l} E \frac{8(z^l)^4}{h^2} \phi^l {}_{,x^l} dA dx^l - \int_{L^e} \int_A \delta \phi^l {}_{,x^l} E \frac{16(z^l)^6}{h^4} \phi^l {}_{,x^l} dA dx^l + \\ & \int_{L^e} \int_A \delta w^l {}_{,x^l} G w^l {}_{,x^l} dA dx^l - \int_{L^e} \int_A \delta \theta^l G \theta^l dA dx^l - \int_{L^e} \int_A \delta \phi^l G \phi^l dA dx^l + \\ & \int_{L^e} \int_A \delta \phi^l G \frac{24(z^l)^2}{h^2} \phi^l dA dx^l - \int_{L^e} \int_A \delta \phi^l G \frac{144(z^l)^4}{h^4} \phi^l dA dx^l = \int_0^L \delta w^l f_z dx^l + \int_0^L \delta u^l f_x dx^l \quad (10) \end{aligned}$$

Dimana $\delta \varepsilon^l$ adalah *Virtual strain* aksial, $\delta \gamma^l$ adalah *Virtual strain* geser, δw^l adalah perpindahan transversal akibat beban virtual, δu^l adalah perpindahan longitudinal akibat beban virtual, dan $\delta \theta^l$ adalah rotasi akibat beban virtual.

2.6 Perumusan Degenerated Solid Beam Element

Konfigurasi elemen dapat di lihat pada Gambar 1. Persamaan displacement field dapat di tuliskan sebagai berikut (B.L. Koziey & F.A. Mirza,1993) :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i M_1 \begin{Bmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{Bmatrix} \theta_i - \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i M_2 \begin{Bmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{Bmatrix} \phi_i \quad (11)$$

Dimana N_i merupakan *shape function* kuadratik atau kubik, γ_i adalah sudut diantara sumbu lokal (x^l, z^l) dan sumbu global (x, z) di node i . *Shape function* M_1 dan M_2 mengaproksimasikan displacement field sepanjang tinggi penampang akibat rotasi θ dan ϕ , dan persamaan tersebut sebagai berikut:

$$M_1 = \frac{h_i t}{2}, M_2 = \frac{h_i t}{2} (1 - t^2), h_i = \|V_i\| \quad (12)$$

Dimana h_i merupakan tinggi dari balok di titik node i . Sinus dan kosinus dari sudut γ diperhitungkan dengan perumusan sebagai berikut:

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}}, \sin \gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}} \quad (13)$$

Dimana $\frac{\partial x}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial s}$ diperhitungkan menggunakan persamaan (1)

Hubungan antara tegangan $\{\epsilon^l\}$, sepanjang sumbu lokal, di setiap titik di seluruh elemen dan *degrees of freedom* dibutuhkan. Untuk defleksi kecil, regangan pada sumbu lokal (x^l, z^l) dapat di tuliskan sebagai berikut:

$$\{\epsilon^l\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x^l x^l} \\ \gamma_{x^l z^l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^l} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z^l} & \frac{\partial}{\partial x^l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^l \\ w^l \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Dimana perpindahan u^l dan w^l ditinjau terhadap x^l dan z^l . Perpindahan u^l dan w^l dapat diperoleh dari u dan w dengan persamaan berikut:

$$\begin{Bmatrix} u^l \\ w^l \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Matriks transformasi $[R]$ berisikan kosinus antara sumbu lokal (x^l, z^l) dan sumbu global (x, z) di titik yang di tinjau. Menggunakan persamaan (11) dan produk dari persamaan (15) menghasilkan perpindahan sepanjang sumbu lokal sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} u^l \\ w^l \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{Bmatrix} u_i + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i \begin{Bmatrix} \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} w_i - \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i M_1 \begin{Bmatrix} \cos \gamma \cos \gamma_i + \sin \gamma \sin \gamma_i \\ -\sin \gamma \cos \gamma_i + \cos \gamma \sin \gamma_i \end{Bmatrix} \theta_i - \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i M_2 \begin{Bmatrix} \cos \gamma \cos \gamma_i + \sin \gamma \sin \gamma_i \\ -\sin \gamma \cos \gamma_i + \cos \gamma \sin \gamma_i \end{Bmatrix} \phi_i \quad (16)$$

Mensubstitusi persamaan (16) kedalam persamaan (14) menghasilkan hubungan regangan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x^l x^l} \\ \gamma_{x^l z^l} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \cos \gamma & \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \sin \gamma & -M_1 C U_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} & -M_2 C U_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x^l} \sin \gamma & \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \cos \gamma & N_i C U_i \frac{\partial M_1}{\partial z^l} - M_1 C W_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} & -N_i C U_i \frac{\partial M_2}{\partial z^l} - M_2 C W_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \phi_i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Dimana $C U_i = \cos \gamma \cos \gamma_i + \sin \gamma \sin \gamma_i$ dan $C W_i = -\sin \gamma \cos \gamma_i + \cos \gamma \sin \gamma_i$.

Persamaan (17) dapat di tulis sebagai berikut:

$$\{\epsilon^l\} = [B^l] \{d\} \quad (18)$$

Dimana $[B^l]$ merupakan matriks regangan-perpindahan yang menghubungkan regangan sepanjang sumbu lokal x^l dan z^l dan $\{d\}$ yang merupakan vektor perpindahan.

Bentuk dari *generalized Hooke's law* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\{\tau^l\} = \begin{Bmatrix} \tau_{x^l x^l} \\ \tau_{x^l z^l} \end{Bmatrix} = [D^l] [\{\epsilon^l\} - \{\epsilon_0^l\}] + \{\tau_0^l\} \quad (19)$$

Dimana $[D^l]$ merupakan matriks elastisitas pada koordinat lokal, $[D^l]$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\{D^l\} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dimana E merupakan modulus elastisitas material dan G merupakan modulus geser.

2.7 Matriks Kekakuan

Perumusan yang digunakan prinsip virtual work sehingga mendapat persamaan keseimbangan sebagai berikut:

$$\{k\}\{d\} = \{f\} \quad (21)$$

Dimana perumusan matriks kekakuan $\{k\}$ dan matriks pembebanan $\{f\}$ dapat diperoleh dengan perumusan sebagai berikut:

$$\{k\} = \int_V [B']^T [D'] [B'] dV \quad (22)$$

$$\{f\} = \int_V [N]^T \{b\} dV + \int_S [N]^T \{T\} dS + [N]^T \{P\} \quad (23)$$

Dimana $[b]$ = vektor *body force* , $\{T\}$ = vektor *surface traction force*, dan $\{P\}$ = vektor *point load*

Turunan parsial terhadap koordinat lokal dapat diperoleh dengan perumusan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial s}{x^l} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial t}{x^l} \frac{\partial}{\partial t} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^l} = \frac{\partial s}{\partial z^l} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial z^l} \frac{\partial}{\partial t} \quad (25)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x^l} = \frac{\partial s}{\partial z^l} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x^l} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}} \quad (27)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z^l} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}} \quad (28)$$

Matriks kekakuan dapat diperhitungkan dengan perumusan sebagai berikut:

$$\{k\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^l]^T [D^l] [B^l] \det|J| b \, ds \, dt \quad (29)$$

Dimana $\det|J| = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}\right)$, b = Lebar balok

2.8 Metode Least Square Smoothed Assumed Strain (LSSAS)

Pada suatu elemen FEM sering menghasilkan hasil yang tidak konsisten dan mengalami fluktuasi atau *locking*. Hal ini sering terjadi karena derajat yang dimiliki oleh persamaan yang tidak konsisten dari rotasi lentur dengan rotasi total, untuk mencegah hal ini akan dilakukan modifikasi *shape function*.

Metode *least square smoothed assumed strain* (LSSAS) adalah metode yang memiliki tujuan untuk merubah *shape function* menjadi fungsi yang lebih halus. Cara kerja dari metode ini ialah dengan mencari nilai minimum dari suatu turunan fungsi hasil kuadrat dari selisih dari *shape function* lama dan juga *shape function* baru yang disamadengankan dengan nol. Untuk mencari nilai *shape function* baru $\bar{N}$ digunakan metode LSSAS. Metode ini terinspirasi dari jurnal Prathap dan Ramesh Babu (1986). Berikut bentuk persamaan matematisnya:

$$f(\bar{N}_a) = \int_{-1}^1 (\bar{N}_a - N_a)^2 ds \quad (30)$$

Setelah fungsi dari $\bar{N}$ telah di temukan persamaan fungsinya, fungsi tersebut di cari nilai puncaknya dengan cara persamaan tersebut di turunkan dan turunan tersebut diturunkan dan turunan tersebut sama dengan nol. Dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{df}{d\bar{N}_a} = 0 \quad (31)$$

Tinggi derajat yang dimiliki oleh $\bar{N}$ diasumsikan satu tingkat lebih rendah dari N yang ditinjau atau N yang akan dihaluskan. Jika $\bar{N}$ memiliki beberapa variabel yang akan dicari, seperti pada elemen yang kuadratik dan kubik, maka dilakukan diferensial parsial terhadap masing-masing variabel. Contohnya untuk elemen kuadratik:

$$N_a = a + b\xi + c\xi^2 \quad (32)$$

$$\bar{N}_a = \alpha + \beta\xi \quad (33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0; \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0 \quad (34)$$

Penurunan rumus akan dilakukan untuk elemen kuadratik dan kubik. Mensubstitusi *shape function* baru kedalam persamaan (17) menghasilkan hubungan regangan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{x^l x^l} \\ \gamma_{x^l z^l} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x^l} \cos \gamma & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x^l} \sin \gamma & -M_1 C U_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} & -M_2 C U_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \\ -\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x^l} \sin \gamma & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x^l} \cos \gamma & N_i C U_i \frac{\partial M_1}{\partial z^l} - M_1 C W_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} & -N_i C U_i \frac{\partial M_2}{\partial z^l} - M_2 C W_i \frac{\partial N_i}{\partial x^l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad (35)$$

3. HASIL DAN DISKUSI

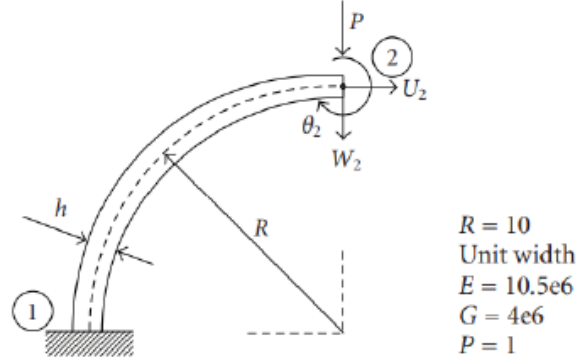
3.1 Studi Pengujian Balok Lengkung *Degenerated Solid*

Pengujian elemen yang menggunakan TOSD dibutuhkan *restraint* pada beberapa DOF agar elemen bisa berkerja, tanpa adanya *restraint* tambahan elemen tidak dapat berkerja menghasilkan matriks kekakuan yang *singular*. Letak DOF yang di-*restraint* untuk elemen MEH konvensional kuadratik dan LSSAS terletak pada node dua yang berada di tengah bentang balok, dilakukan *restraint* untuk rotasi ϕ . Untuk elemen kubik dengan TOSD yang di *restraint* terletak pada node dua dan tiga, yang di restrain merupakan rotasi ϕ . Untuk elemen *Consistent Beam* dengan TOSD dilakukan restraint perpindahan rotasi u dan w pada node dua dan node empat, untuk node tiga yang terletak pada tengah bentang dilakukan restraint rotasi θ dan rotasi ϕ .

3.2 Busur Kantilever Berbentuk Seperempat Lingkaran

Untuk mengetahui kemampuan perumusan mengeliminasi *locking* dilakukan pengujian pada busur kantilever yang berbentuk seperempat lingkaran seperti pada Gambar 4. Data material yang diberikan $R = 10$, $E = 10.5 \cdot 10^6$, $G = 4 \cdot 10^6$, $k = 5/6$, $P = 1$, $b = 1$, dan nilai h bervariasi dengan perbandingan R/h sebesar 4, 10, 100, 1000, dan 10000. Struktur dianalisa dengan cara dibagi dengan beberapa jumlah elemen (N). Struktur dibagi menjadi 1 elemen, 4 elemen, 8 elemen, dan 16 elemen. Hasil eksak dapat diperoleh dari persamaan (36) sampai dengan

persamaan (38). Hasil yang diperoleh digunakan untuk normalisasi perpindahan radial (w_{MEH}/w_{eksak}) pada ujung bebasnya disajikan pada Table 2. Perpindahan tangensial (u_{MEH}/u_{eksak}) dan rotasi ($\theta_{MEH}/\theta_{eksak}$) memiliki *trend* nilai normalisasi yang sama dengan normalisasi perpindahan radial (w_{MEH}/w_{eksak})



Gambar 4. Sebuah busur kantilever berbentuk seperempat lingkaran

$$u = \frac{PR^3}{2EI} + \frac{PR}{2kGA} - \frac{PR}{2EA} \quad (36)$$

$$w = \frac{\pi PR^3}{4EI} + \frac{\pi PR}{4kGA} + \frac{\pi PR}{4EA} \quad (37)$$

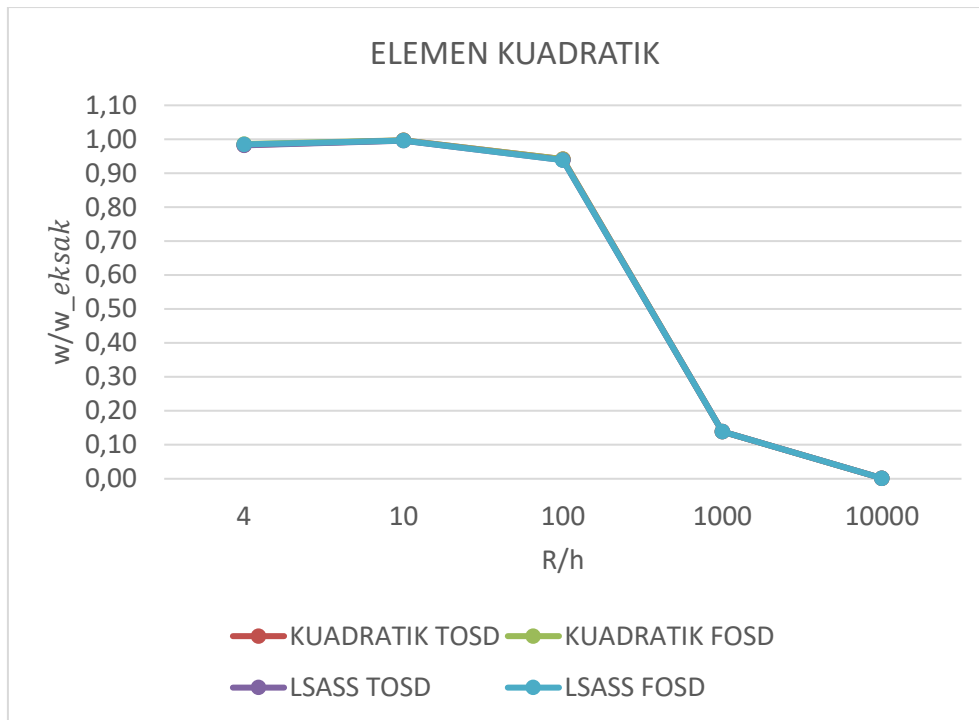
$$\theta = \frac{PR^2}{EI} \quad (38)$$

Tabel 2. Normalisasi perpindahan tangensial akibat penipisan balok dan penambahan jumlah elemen pada elemen kuadratik, kubik, dan *consistent beam*

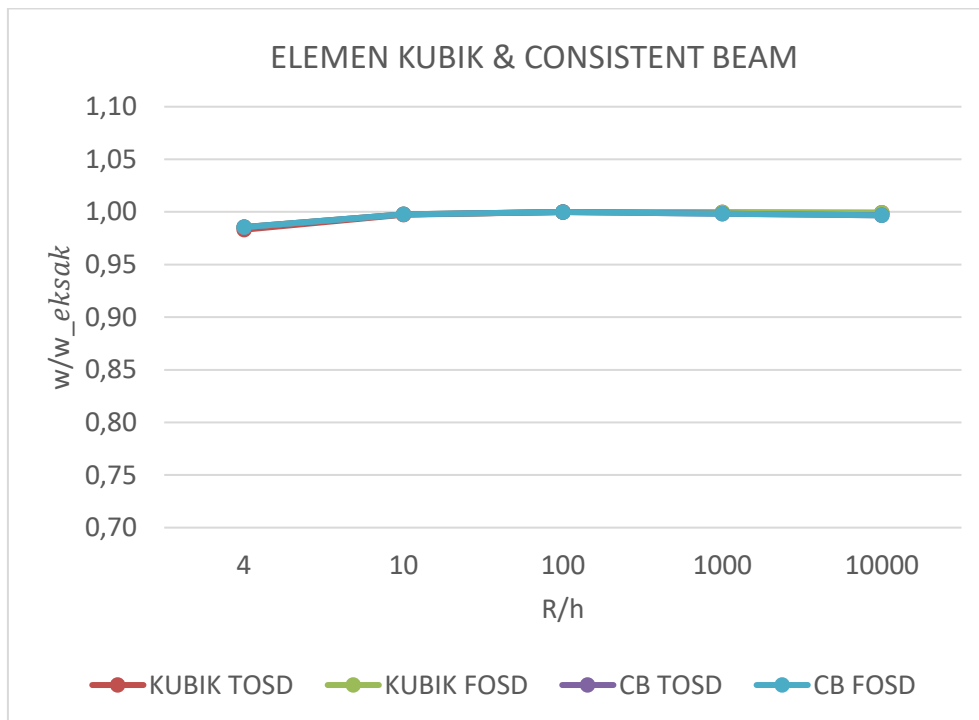
R/h	Hasil Eksak	N	(w_{MEH}/w_{eksak})							
			Kuadratik		Kuadratik LSASS		Kubik		Consistent Beam	
			TOSD	FOSD	TOSD	FOSD	TOSD	FOSD	TOSD	FOSD
4	1	1	0.1999	0.2136	0.1422	0.1507	0.8556	0.8575	0.7390	0.7424
		4	0.9598	0.9610	0.9431	0.9441	0.9836	0.9855	0.9854	0.9854
		8	0.9822	0.9840	0.9788	0.9805	0.9834	0.9856	0.9856	0.9856
		16	0.9832	0.9855	0.9824	0.9847	0.9831	0.9856	0.9856	0.9856
10	1	1	0.0389	0.0421	0.0274	0.0292	0.7771	0.7782	0.6061	0.6112
		4	0.8611	0.8622	0.8356	0.8370	0.9969	0.9971	0.9962	0.9963
		8	0.9873	0.9874	0.9823	0.9824	0.9974	0.9977	0.9976	0.9977
		16	0.9968	0.9970	0.9958	0.9961	0.9973	0.9977	0.9977	0.9977
100	1	1	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.7418	0.7423	0.1184	0.1358
		4	0.0611	0.0615	0.0592	0.0595	0.9900	0.9900	0.9635	0.9635
		8	0.5035	0.5039	0.4985	0.4989	0.9994	0.9994	0.9979	0.9979
		16	0.9412	0.9412	0.9385	0.9386	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
1000	1	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7414	0.7418	0.0015	0.0018
		4	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.9868	0.9868	0.9512	0.9514
		8	0.0101	0.0101	0.0100	0.0100	0.9969	0.9969	0.9880	0.9880
		16	0.1392	0.1393	0.1389	0.1390	0.9996	0.9996	0.9983	0.9983
10000	1	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7414	0.7418	0.0000	0.0000
		4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.9868	0.9868	0.8811	0.8921
		8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.9967	0.9968	0.9873	0.9873
		16	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.9992	0.9992	0.9969	0.9969

Kuadratik adalah *degenerated solid beam element* yang menggunakan interpolasi kuadratik, kuadratik LSSAS adalah *degenerated solid beam element* yang menggunakan interpolasi kuadratik yang telah dimodifikasi dengan LSSAS, kubik adalah *degenerated solid beam element* yang menggunakan interpolasi kubik, dan *consistent beam* adalah *consistent beam element* yang menggunakan interpolasi gabungan antara kubik dan kuadratik.

Dari Tabel 2 dan Gambar 5 dapat dilihat bahwa terjadi konvergensi, di seluruh nilai normalisasi rotasi pada semua nilai R/h . Namun dapat dilihat bahwa seluruh elemen kuadratik (Kuadratik TOSD, Kuadratik FOSD, Kuadratik LSSAS TOSD, dan Kuadratik LSSAS FOSD) tidak dapat memperoleh nilai eksak, dimana nilai yang di peroleh dari seluruh elemen kuadratik memiliki nilai maksimal 0.1393 pada nilai $R/h=1000$ dan memiliki nilai maksimal 0.0016 pada nilai $R/h=10000$. Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa untuk elemen kubik (kubik TOSD dan Kubik FOSD) dan untuk elemen *consistent beam* (*consistent beam* TOSD dan *consistent beam* FOSD) memiliki nilai yang konvergen pada setiap nilai R/h . Selain memiliki nilai yang konvergen pada nilai R/h dapat dilihat bahwa nilai normalisasi dari defleksi tangensial, radial, dan rotasi memiliki nilai yang mendekati nilai 1. Hal ini menunjukkan bahwa perumusan elemen ini telah bebas locking. Agar lebih jelas bahwa perumusan dengan elemen kubik dan *consistent beam* telah bebas *locking*, dapat dilihat pada grafik yang disajikan pada Gambar 6. Dimana dapat dilihat pada grafik diperoleh nilai yang mendekati eksak untuk semua nilai R/h .



Gambar 5 Grafik pengaruh pembesaran rasio kelangsingan balok terhadap nilai normalisasi perpindahan radial untuk 16 elemen kuadrat



Gambar 6 Grafik pengaruh pembesaran rasio kelangsingan balok terhadap nilai normalisasi perpindahan radial untuk 16 elemen kubik dan *consistent beam*

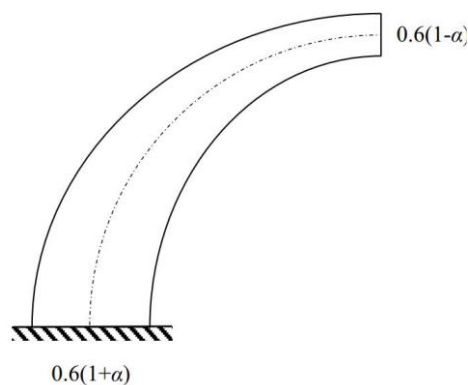
3.3 Balok Lengkung Kantilever yang Mengecil Tinggi Baloknya pada Ujung

Sebuah balok lengkung tidak seragam dengan ketebalan berbeda di setiap potongan balok yang meruncing pada bagian ujungnya seperti pada Gambar 7. Jari-jari kelengkungan balok

(R) adalah 5 m dan sudut kelengkungan ϕT adalah 90° . Data material diberikan $E = 30$ GPa dan $\nu = 0.3$ serta $k = 5/6$, $b = 0.4$ m konstan sepanjang elemen, dan ketebalan (h) yang bervariasi linear sepanjang koordinat tangensial kurva (s) mengikuti persamaan:

$$h(s) = 0.6 \left[1 - \alpha \left(\frac{2}{L} s - 1 \right) \right] \quad (39)$$

Dimana L = Panjang kelengkungan busur lingkaran, $L = \frac{90}{360} \pi \times 8 = 2\pi$ m, dan α = Rasio keruncingan



Gambar 7 Busur lingkaran yang meruncing pada ujungnya dengan variasi ketebalan yang linier

Solusi eksak normalisasi perpindahan dapat dilihat pada Tabel 3. Balok akan dibagi menjadi 4 elemen, 8 elemen dan 16 elemen yang mana setiap elemennya akan digunakan nilai h yang konstan, di mana nilai h akan didapatkan dengan mencari nilai rata-rata dari batas atas dan batas bawah pada setiap elemennya. Beban diberikan pada ujung bebas dan diaplikasikan secara terpisah, yaitu beban momen $Mb=1$ kNm. Hasil yang diperoleh untuk normalisasi perpindahan tangensial (u), radial (w) dan rotasi (θ) pada ujung bebasnya terhadap hasil eksak disajikan pada Tabel 4 untuk masing-masing kondisi pembebanan dengan nilai $\alpha=0.1$ dan 0.4.

Tabel 3. Solusi eksak normalisasi perpindahan untuk masing-masing tipe pembebanan

Tipe Pembebanan	α	$\bar{u} \times 10^{-5}$	$\bar{w} \times 10^{-5}$	$\bar{\theta} \times 10^{-5}$
Beban momen $Mb=1$ kNm	0.1	0.7376	1.3777	2.3618
	0.4	0.5698	1.3468	3.2806

Pada elemen *consistent beam* dengan nilai $\alpha=0.4$ yang dibagi menjadi 8 dan 16 elemen tidak dapat menemukan karena hasil eigen value dari matriks kekakuan memiliki nilai nol. Terlihat adanya konvergensi yaitu dengan penambahan jumlah elemen, hasil yang diperoleh pada penelitian ini semakin mendekati hasil eksak. Pada elemen kubik dan *consistent beam*

diperoleh hasil yang hampir sama. Untuk elemen kuadratik, dengan jumlah elemen yang sedikit, diperoleh hasil yang paling tidak akurat dan selisih nilai yang cukup besar dengan hasil eksak jika dibandingkan dengan kubik dan *consistent beam*. Rotasi pada element TOSD yang dihasilkan akibat pembebanan moment lebih besar dibandingkan rotasi eksaknya.

Tabel 4. Normalisasi perpindahan tangensial (u), radial (w) dan rotasi (θ) pada kasus dua untuk elemen kuadratik, kubik, dan *consistent beam*

		Hasil Eksak	N	Nilai Perpindahan							
				Kuadratik		Kuadratik LSASS		Kubik		Consistent Beam	
				TOSD	FOSD	TOSD	FOSD	TOSD	FOSD	TOSD	FOSD
$\alpha=0.1$	$\bar{u}$	1	4	0.9158	0.9158	0.9045	0.9041	1.0011	1.0011	1.0012	1.0012
			8	0.9952	0.9950	0.9932	0.9928	1.0010	1.0009	1.0009	1.0010
			16	1.0007	1.0006	1.0003	1.0001	1.0011	1.0009	1.0009	1.0010
	$\bar{w}$	1	4	0.9080	0.9069	0.8973	0.8958	0.9986	0.9974	0.9980	0.9972
			8	0.9924	0.9911	0.9905	0.9889	0.9984	0.9975	0.9982	0.9975
			16	0.9979	0.9971	0.9975	0.9966	0.9981	0.9975	0.9982	0.9975
	$\bar{\theta}$	1	4	0.9068	0.9016	0.9082	0.9019	1.0123	0.9990	1.0080	0.9992
			8	1.0064	0.9922	1.0068	0.9921	1.0214	0.9991	1.0150	0.9992
			16	1.0217	0.9987	1.0218	0.9987	1.0263	0.9992	1.0229	0.9992
$\alpha=0.4$	$\bar{u}$	1	4	0.9263	0.9259	0.9241	0.9231	1.0020	1.0016	1.0026	1.0025
			8	0.9965	0.9961	0.9955	0.9948	1.0013	1.0009		
			16	1.0010	1.0006	1.0007	1.0002	1.0014	1.0009		
	$\bar{w}$	1	4	0.8983	0.8968	0.8960	0.8940	1.0002	0.9980	0.9994	0.9981
			8	0.9929	0.9906	0.9918	0.9893	0.9989	0.9971		
			16	0.9985	0.9967	0.9982	0.9963	0.9986	0.9971		
	$\bar{\theta}$	1	4	0.8447	0.8433	0.8543	0.8519	1.0122	0.9991	1.0085	0.9996
			8	1.0004	0.9871	1.0019	0.9882	1.0267	1.0008		
			16	1.0277	0.9999	1.0279	0.9999	1.0408	1.0008		

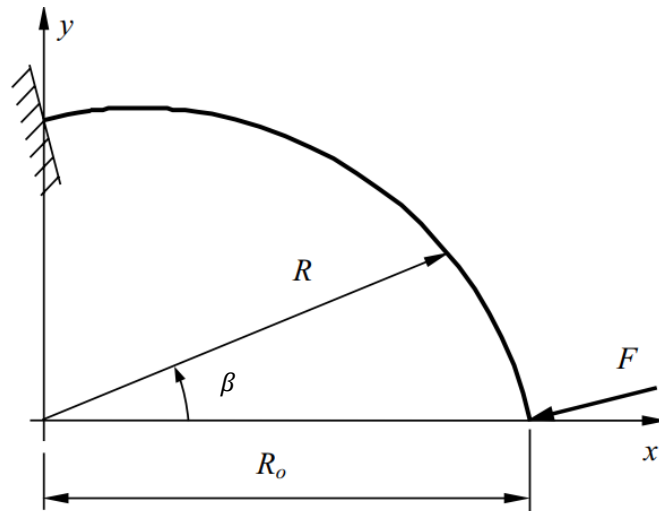
3.4 Balok Lengkung Kantilever Berbentuk Spiral

Untuk mengetahui kemampuan dari metode yang disajikan pada penelitian ini pada permasalahan yang bukan berbentuk lingkaran atau radius yang konstan, maka akan disajikan balok kantilever dengan geometri yang berbentuk spiral. Geometri dari balok ditunjukkan pada Gambar 8 dengan radius (R) bervariasi sepanjang sudut kurva (β) dengan persamaan:

$$R = R_0(1 - \mu \times \beta) \quad (40)$$

Dimana R_0 = Radius kurva pada posisi β sama dengan 0, μ = koefisien parameter bentuk kurva $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$

Balok diberi beban terpusat searah radial pada ujung bebasnya sebesar 1000 N ($F = 1000$ N). Data-data struktur balok diberikan $\mu = 0.2$, $R_0 = 1$ m, $A = 0.01$ m², $I = 8.333 \times 10^{-6}$ m⁴, $E = 2 \times 10^{10}$ N/m², $\nu = 0.15$, dan $k = 5/6$. Balok akan dibagi menjadi 1 elemen, 4 elemen, 8 elemen, 16 elemen dengan radius yang dibuat konstan. Radius dari setiap elemen akan dihitung dengan mencari nilai rata-rata dari batas atas dan batas bawah pada setiap elemennya.



Gambar 8 Balok kantilever dengan geometri spiral

Terlihat adanya konvergensi yaitu dengan penambahan jumlah elemen, hasil yang diperoleh pada penelitian ini semakin mendekati hasil eksak. Pada elemen kubik dan *consistent beam* diperoleh hasil yang hampir sama. Untuk elemen kuadratik, dengan jumlah elemen yang sedikit, diperoleh hasil yang paling tidak akurat dan selisih nilai yang cukup besar dengan hasil eksak jika dibandingkan dengan elemen kuadratik dan *consistent beam*. Pada elemen LSSAS dengan teori TOSD menghasilkan nilai reaksi vertikal yang memiliki nilai yang random.

Tabel 5. Normalisasi nilai perpindahan pada ujung bebas dan reaksi perletakan pada kasus tiga untuk elemen kuadratik, kubik, dan *consistent beam*

	Hasil Eksak	N	Nilai Perpindahan							
			Kuadratik		Kuadratik LSSAS		Kubik		Consistent Beam	
			TOSD	FOSD	TOSD	FOSD	TOSD	FOSD	TOSD	FOSD
$\bar{u}$	-1.90	1	-0.12	-0.13	-0.08	-0.09	-1.72	-1.72	-1.15	-1.18
		4	-1.71	-1.72	-1.69	-1.69	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90
		8	-1.89	-1.89	-1.88	-1.88	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90
		16	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90	-1.90
$\bar{w}$	3.16	1	0.16	0.18	0.13	0.14	2.71	2.71	1.96	2.01
		4	2.82	2.82	2.78	2.79	3.15	3.15	3.15	3.15
		8	3.13	3.13	3.11	3.11	3.15	3.15	3.15	3.15
		16	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15
$\bar{\theta}$	-4.56	1	-0.22	-0.24	-0.25	-0.27	-4.30	-4.30	-3.60	-3.69
		4	-4.08	-4.08	-4.13	-4.13	-4.56	-4.55	-4.55	-4.55
		8	-4.52	-4.52	-4.52	-4.51	-4.56	-4.55	-4.55	-4.55
		16	-4.55	-4.55	-4.55	-4.55	-4.55	-4.55	-4.55	-4.55
F_t	-996.27	1	-996.27	-996.27	-1786.19	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27
		4	-996.27	-996.27	-1003.67	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27
		8	-996.27	-996.27	-1009.11	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27
		16	-996.27	-996.27	-1011.20	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27	-996.27
F_n	86.24	1	86.24	86.24	218.69	86.24	86.24	86.24	86.24	86.24
		4	86.24	86.24	-1002.71	86.24	86.24	86.24	86.24	86.24
		8	86.24	86.24	-198.68	86.24	86.24	86.24	86.24	86.24
		16	86.24	86.24	16.74	86.24	86.24	86.24	86.24	86.24
M_b	868.49	1	868.41	868.48	689.93	750.58	868.57	868.57	651.18	662.88
		4	868.64	868.64	926.10	867.71	868.64	868.64	868.15	868.15
		8	868.64	868.64	874.49	866.62	868.64	868.64	868.63	868.63
		16	868.64	868.64	869.05	868.08	868.64	868.64	868.64	868.64

4. KESIMPULAN

Kinerja dari *degenerated solid beam element* yang dimodifikasi menggunakan LSSAS berdasarkan TOSD lebih buruk jika dibandingkan dengan elemen lainnya, dimana elemen tersebut gagal memperoleh reaksi vertikal perletakan pada pembebanan beban merata vertikal pada balok semi elips. Perumusan *degenerated solid beam element* belum mampu menyajikan besar gaya dalam. Nilai gaya dalam yang jauh lebih kecil dibanding nilai aslinya. *Degenerated solid beam element* yang dimodifikasi menggunakan LSSAS memiliki performa yang sama dengan *degenerated solid beam element* tanpa modifikasi *shape function*, tidak membuat elemen balok lengkung menjadi bebas dari *shear locking* dan *membrane locking*. Elemen yang menerapkan TOSD memiliki performa yang sama dengan elemen yang menerapkan FOSD. Namun elemen yang menerapkan TOSD bisa memberi nilai rotasi yang lebih besar dibandingkan nilai rotasi eksak.

5. DAFTAR REFERENSI

- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. & Witt, R.J. (2002). Concepts and applications of finite element analysis (4th ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- Gerges, R. R., & El-Damatty, A. A. (2002, June). Large displacement analysis of curved beams. In Proceeding of CSCE Conference, Montreal, QC, Canada, ST (Vol. 100).
- Koziey, B.L. & Mirza, F.A. (1994). Consistent curved beam element. *Computer & Structures*, 51(6), p. 643-654.
- Nascimbene, R. (2013). An arbitrary cross section, locking free shear-flexible curved beam finite element. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 14. 90-103. 10.1080/15502287.2012.698706.
- Prathap, G. & Naganarayana, B.P. (1990), Analysis of locking and stress oscillations in a degenerated solid beam element. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 30: 177-200. <https://doi.org/10.1002/nme.1620300111>
- Prathap, G. and Babu, C.R. (1986), An isoparametric quadratic thick curved beam element. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 23: 1583-1600. <https://doi.org/10.1002/nme.1620230902>
- Saffari & Tabatabaei (2007) A finite circular arch element based on trigonometric shape functions. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2007, Article ID 78507.
- Shahba et. al (2013) New shape functions for non-uniform curved timoshenko beams with arbitrarily varying curvature using basic displacement functions. *Meccanica* 48:159–174
- Shehata, A.Y. & El Damatty, Ashraf & Savory, Eric. (2005). Finite element modeling of transmission line under downburst wind loading. *Finite Elements in Analysis and Design*. 42. 71-89. 10.1016/j.finel.2005.05.005.
- Stolarski, H., & Belytschko, T. (1983). Shear and membrane locking in curved C0 elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41(3), 279 – 296.
- Tufekci, Ekrem & Eroglu, Ugurcan & Aya, Serhan. (2017). A new two-noded curved beam finite element formulation based on exact solution. *Engineering with Computers*. 33. 10.1007/s00366-016-0470-1.